فصل اوّل) اعداد مختلط

مجموعه اعداد مختلط (یا موهومی) تعمیمی از دستگاه اعداد حقیقی می باشد که این مجموعه را با نماد $\mathbb{C}$ نمایش می دهند.

$$\mathbb{C}=\{z \mid z=x+iy\}$$

$x=$ قسمت حقیقی

$y=$ قسمت موهومی

$x=Re(z)$ ، $y=Im(z)$ ، $i=\sqrt{-1} \Rightarrow \boxed{i^2=-1}$ ، $i^3=i^2 \cdot i=-i$

نکته) $i^{4n}=1$ ، $i^{4n+1}=i$ ، $i^{4n+2}=-1$ ، $i^{4n+3}=-i$

نکته) هر عدد حقیقی، مختلط (یا موهومی) است ولی عکس آن درست نیست.

$z=-2 \in \mathbb{R}$ ، But: $z=1+i \notin \mathbb{R}$

$z=-2+0i$

* مزدوج یک عدد مختلط:

اگر $z=x+iy$ باشد، مزدوج z، که به صورت $\bar{z}$ نمایش داده می شود، به صورت زیر است:

$$\bar{z}=x-iy$$

به عبارت دیگر، (در مزدوج کردن عدد مختلطی همچون z، فقط قسمت موهومی z، قرینه می شود.)

مثال) $z=\sqrt{3}+4i \longrightarrow \bar{z}=\sqrt{3}-4i$

$z=2-\frac{5}{6}i \longrightarrow \bar{z}=2+\frac{5}{6}i$

نکته) $\begin{cases} z=x+iy \\ \bar{z}=x-iy \end{cases} \longrightarrow z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-y^2(\cancel{i^2})^{-1}=x^2+y^2$

پس $\Rightarrow z\bar{z}=x^2+y^2$

* قدر مطلق یا مدول یا اندازه ی یک عدد مختلط:

هرگاه $z=x+iy$ باشد، قدر مطلق z را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$z=x+iy \longrightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

نتیجه $\Rightarrow \bar{z}=x-iy \Rightarrow |\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\begin{cases} z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2 \\ |z|=|\bar{z}| \end{cases}$

مثال) $z=2+2\sqrt{3}i \Rightarrow |z|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

چند تساوی مهم:

A) اگر : $|z|=0 \iff z=0$

B) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$ C) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

D) $|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$ E) $|z| = |\bar{z}|$

F) $z - \bar{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$

اثبات) $\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}\right\} \Rightarrow z-\bar{z} = (\cancel{x}+iy)-(\cancel{x}-iy) = iy-(-iy) = 2iy = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$

G) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

اثبات) $\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}\right\} \Rightarrow z+\bar{z} = (x+\cancel{iy})+(x-\cancel{iy}) = 2x = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$

مثال) اگر $(1-2i)^9 z = (1+2i)^{12}$ ، مطلوبست محاسبه‌ی $|z|$ ؟

پاسخ)

$$z = \frac{(1+2i)^{12}}{(1-2i)^9} \quad , \quad |z| = ?$$

$$|z| = \left|\frac{(1+2i)^{12}}{(1-2i)^9}\right| \xrightarrow[\text{در بالای صفحه}]{\text{طبق خاصیت B}} \frac{|(1+2i)^{12}|}{|(1-2i)^9|}$$

و امّا طبق خاصیت D (در بالای صفحه) داریم:

$$|z| = \frac{|(1+2i)^{12}|}{|(1-2i)^9|} = \frac{|(1+2i)|^{12}}{|(1-2i)|^9}$$

و امّا با کمی دقت معلوم می‌شود که اگر $1+2i$ را z_1 بنامیم داریم: $\bar{z}_1 = 1-2i$

پس $\Rightarrow |z| = \dfrac{|1+2i|^{12}}{|1-2i|^9} = \dfrac{|z_1|^{12}}{|\bar{z}_1|^9} \xrightarrow[\text{در بالای صفحه}]{\text{طبق خاصیت E}} \dfrac{\cancel{|z_1|^{12}}}{\cancel{|z_1|^9}} = |z_1|^3$

پس $\Rightarrow |z| = |z_1|^3 = |1+2i|^3 = \left(\sqrt{(1)^2+(2)^2}\right)^3 = (\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5}$

* عکس یک عدد مختلط :

عدد مختلط $z = x + iy$ مفروض است . عدد مختلط $\bar{z}^{1}$ (یا $\frac{1}{z}$) را عکس عدد z گوییم ، اگر داشته باشیم : $z.\bar{z}^{1} = 1$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z}^{1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$$

نکته) هرگاه داشته باشیم $\frac{z_1}{z_2}$ برای پیدا کردن حاصل آن ، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم .

$$\text{پس} \Rightarrow \bar{z}^{1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}$$

$$\bar{z}^{1} = \frac{x-iy}{x^2 - y^2 \cancel{(i^2)}_{-1}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\, i$$

مثال) اگر $z = \frac{2+3i}{1+2i} - \frac{2+i}{6-i}$ باشد ، مقادیر x و y را بیابید ؟ $\begin{cases} Re(z) = ? \\ Im(z) = ? \end{cases}$

پاسخ)

$$z = \frac{2+3i}{1+2i} - \frac{2+i}{6-i}$$

$$z = \left(\frac{2+3i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}\right) - \left(\frac{2+i}{6-i} \cdot \frac{6+i}{6+i}\right)$$

$$z = \left(\frac{2+3i-4i+6}{1+4}\right) - \left(\frac{12+6i+2i-1}{36+1}\right) = \frac{8-i}{5} - \frac{11+8i}{37}$$

$$z = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i - \frac{11}{37} - \frac{8}{37}i \longrightarrow z = \underbrace{\left(\frac{8}{5} - \frac{11}{37}\right)}_{x} - \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{8}{37}\right)}_{y} i$$

$$\Rightarrow \quad Re(z) = \frac{8}{5} - \frac{11}{37} \quad , \quad Im(z) = -\left(\frac{1}{5} + \frac{8}{37}\right)$$

مثال) الف) $z = 2-3i$ باشد، مطلوبست تعیین $Re(z^{-1})$؟

پاسخ) $Re(z^{-1})$ یعنی قسمت حقیقی عدد مختلط z^{-1}

$$z = 2-3i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \ ,\ Re(z^{-1}) = \frac{2}{13}$$

مثال) حاصل کسر زیر را به صورت $a+bi$ نمایش دهید؟

$$z = \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$$

پاسخ)

$$\begin{cases} (1-i)^5 = \left((1-i)^2\right)^2(1-i) = (\cancel{1}-2i-\cancel{1})^2(1-i) = -4(1-i) = 4i-4 \\ (1+i)^5 = \left((1+i)^2\right)^2(1+i) = (\cancel{1}+2i-\cancel{1})^2(1+i) = -4(1+i) = -4i-4 \end{cases}$$

به جای $(1-i)^5$ و $(1+i)^5$ مقادیر به دست آمده را در کسر قرار داده و داریم:

$$z = \frac{(4i-4)-1}{(-4i-4)+1} = \frac{4i-5}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-12i+15-20i+16\cancel{i^2}^{-1}}{9-16\underbrace{\cancel{(i^2)}}_{-1}}$$

$$z = \frac{-1-32i}{25} = \frac{-1}{25} - \frac{32}{25}i \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{25} \\ b = -\frac{32}{25} \end{cases}$$

مثال) حاصل $z = \dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$ را به صورت $a+ib$ نمایش دهید؟

پاسخ)

$$* \begin{cases} (1+i)^{100} = \left((1+i)^2\right)^{50} = (\cancel{1}+2i-\cancel{1})^{50} = 2^{50}(i^2)^{25} = -2^{50} \\ (1-i)^{96} = \left((1-i)^2\right)^{48} = (\cancel{1}-2i-\cancel{1})^{48} = 2^{48}(i^2)^{24} = +2^{48} \\ (1+i)^{98} = \left((1+i)^2\right)^{49} = (\cancel{1}+2i-\cancel{1})^{49} = 2^{49}(i^2)^{24}i = 2^{49}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-2^{50}}{2^{48} - i(2^{49})i} = \frac{-2^{50}}{2^{48}+2^{49}} = \frac{-\cancel{2^{48}} \cdot 2^2}{\cancel{2^{48}}(1+2^1)} = \frac{-4}{3} = \underbrace{\frac{-4}{3}}_{a} + \underbrace{0}_{b}i$$

فاکتور می‌گیریم

4) $z^2+(2i-3)z+(5-i)=0$

حل) $\Delta=(2i-3)^2-4(5-i)=(-4-12i+9)-4(5-i)$

$\Delta=-4-12i+9-20+4i \longrightarrow \boxed{\Delta=-15-8i}$

فرض می‌کنیم $\Rightarrow (-15-8i)=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=-15-8i$

حل

$$* \begin{cases} a^2-b^2=-15 \\ 2ab=-8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-15 \\ ab=-4 \end{cases} \longrightarrow \left\{ a^2-\left(\frac{-4}{a}\right)^2=-15 \right.$$

$\longrightarrow b=\frac{-4}{a}$

ادامه $\longrightarrow a^4+15a^2-16=0 \longrightarrow \begin{cases} a=1 \;,\; b=-4 \\ a=-1 \;,\; b=4 \end{cases}$

پس $\Rightarrow (-15-8i)=(1-4i)^2$ یا $(-1+4i)^2$

$$z_0=\frac{3-2i+\sqrt{(1-4i)^2}}{2}=\frac{3-2i+1-4i}{2}=2-3i \checkmark$$

$$z_1=\frac{3-2i-\sqrt{(1-4i)^2}}{2}=\frac{3-2i-1+4i}{2}=1+i \checkmark$$

مثال مهم) اعداد حقیقی a و b را طوری بیابید که $1+i$ ریشه‌ی معادله‌ی $z^5+az^3+b=0$ باشد و ریشه‌ی دیگر آن را بدون محاسبه تعیین کنید؟

حل)

$(1+i)^5+a(1+i)^3+b=0$

$\left[((1+i)^2)^2(1+i)\right]+a\left[(1+i)^2(1+i)\right]+b=0$

$-4(1+i)+2ai(1+i)+b=0$

$\Rightarrow -4-4i+2ai+2a(\cancel{i^2})+b=0$

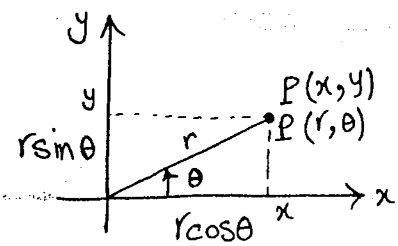
$(-4-2a+b)+(2a-4)i=0$
$\begin{cases} 2a-4=0 \Rightarrow a=2 \ ✓ \\ b-2a=4 \Rightarrow b=8 \ ✓ \end{cases}$

ریشه‌ی دیگر نیز برابر $(1-i)$ می‌باشد. (چرا؟)

تمرین) اگر $z=1+i$ ریشه‌ی معادله‌ی $z^7+az^5+b=0$ باشد، a و b را تعیین کنید؟ $b=-16$ ، $a=-2$

* فرم قطبی یا مثلثاتی یک عدد مختلط :

اگر $P(x,y)$ نقطه‌ای در صفحه مختلط باشد، در این صورت برای $z=x+iy$ داریم :



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

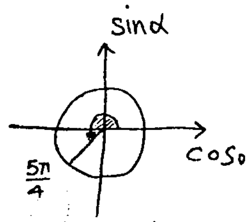
$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

فرم قطبی عدد مختلط $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ⟷ $z=|z|\,cis\,\alpha$

مثال) فرم قطبی اعداد مختلط زیر را بدست آورید؟

1) $z=-2-2\sqrt{3}i$

حل) $|z|=\sqrt{4+12}=4 \longrightarrow |z|=4$



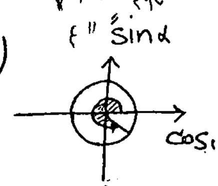
$z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha) \longrightarrow z=4\left(\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i\right)$

$z=4\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \longrightarrow z=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \to$

۲۴۰

ناحیه ۱ ؛ ۲ " " $\pi-\alpha$ ؛ ۳ " " $\pi+\alpha$ ؛ ۴ " " $2\pi-\alpha$

2) $z=1-i$ حل) $|z|=\sqrt{2}$, $z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right)$



$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

تمرین) از رابطه‌ی داده شده مقادیر x و y را بیابید؟

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$$

جواب: $\begin{cases} x=-\frac{4}{11} \\ y=\frac{5}{11} \end{cases}$

* حل معادلات درجه‌ی دوم در اعداد مختلط:

اگر $az^2+bz+c=0$ و $\Delta<0$ باشد، دو ریشه‌ی مزدوج داریم که:

الف) اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ دو ریشه‌ی z_0 و z_1 مزدوج یکدیگرند.

ب) اگر $a,b,c\notin\mathbb{R}$ دو ریشه مزدوج نیستند.

مثال) معادلات زیر را حل کرده و ریشه‌های معادله را بیابید؟

1) $z^2+z+1=0$

حل) $\Delta=1-4(1)(1)=-3<0 \longrightarrow \boxed{\Delta=3i^2}$

$$\begin{cases} z_0=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \checkmark \\ z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \checkmark \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که z_0 و z_1 مزدوج هستند، چون $\Delta<0$ و $a,b,c\in\mathbb{R}$ (ضرایب z^2 و z و ...) ($a=1$, $b=1$, $c=1$)

2) $z^2+4z+16=0$

حل) $\Delta=16-4(16)(1)=-48 \longrightarrow \Delta<0 \longrightarrow \boxed{\Delta=48i^2}$

$$\begin{cases} z_0=\dfrac{-4+\sqrt{48i^2}}{2}=\dfrac{-4+\sqrt{16\times3\times i^2}}{2}=-2+2\sqrt{3}i \checkmark \\ z_1=\dfrac{-4-\sqrt{48i^2}}{2}=\dfrac{-4-\sqrt{16\times3\times i^2}}{2}=-2-2\sqrt{3}i \checkmark \end{cases}$$

3) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$

حل) $\Delta=(2+i)^2-4(-1+7i)=4+\underset{-1}{\cancel{i^2}}+4i+4-28i$

$$\boxed{\Delta=7-24i}$$

با فرض $(7-24i)=(a+bi)^2$ داریم:

$$z_0=\frac{(2+i)+\sqrt{7-24i}}{2}\quad,\quad z_1=\frac{2+i-\sqrt{7-24i}}{2}$$

$$z_2=(7-24i)=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=7-24i$$

$$\begin{cases}a^2-b^2=7\\2ab=-24\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=7\\ab=-12\end{cases}\longrightarrow a^2-\left(\frac{-12}{a}\right)^2=7$$

$b=\frac{-12}{a}$

$$a^4-7a^2-144=0\rightarrow\boxed{a=\pm4}\ *$$

$$\begin{cases}a=+4\longrightarrow b=-3\\a=-4\longrightarrow b=3\end{cases}\longrightarrow(a+bi)^2=(4-3i)^2=(-4+3i)^2=7-24i$$

حال به جای $7-24i$ که در زیر رادیکال قرار دارد، قرار می‌دهیم: $(4-3i)^2$ و داریم:

$$\begin{cases}z_0=\dfrac{(2+i)+\sqrt{(4-3i)^2}}{2}=\dfrac{2+i+4-3i}{2}=\dfrac{6-2i}{2}=3-i\ \checkmark\\[2ex]z_1=\dfrac{(2+i)-\sqrt{(4-3i)^2}}{2}=\dfrac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i\ \checkmark\end{cases}$$

3) $z = \dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{1+i}$

حل) $|z| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right| = \dfrac{|3+\sqrt{3}\,i|}{|1+i|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$|z_1| = 2\sqrt{3} \longrightarrow z_1 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \longrightarrow z_1 = 2\sqrt{3}\left(\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6}\right)$

$|z_2| = \sqrt{2} \longrightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \longrightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)$

$$z = \frac{2\sqrt{3}\left(\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{6}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{12}\right)$$

$\dfrac{\mathrm{cis}\,a}{\mathrm{cis}\,b} = \mathrm{cis}(a-b)$, $(\mathrm{cis}\,a)\cdot(\mathrm{cis}\,b) = \mathrm{cis}(a+b)$ (تذكر

4) $z = \underbrace{(1-i)}_{\downarrow}\underbrace{(i-\sqrt{3})}_{\downarrow}$

حل) $z = z_1 \cdot z_2$

$|z_1| = \sqrt{2} \longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \longrightarrow z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

$z = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\cdot\left(2\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) \longrightarrow z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

* فرمول دموآور:

رابطه‌ی $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ به فرمول دموآور معروف می‌باشد.

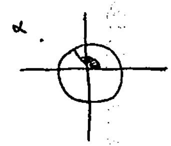
در نتیجه $\Rightarrow$ $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

مثال) مقدار عددی عبارت زیر را بیابید؟

$$z = (-1+\sqrt{3}\,i)^{90}$$

حل) $|z| = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow z = \left(2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^{90}$

$$z = 2^{90}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{90}$$



$$z = 2^{90}\left(\cos 90\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin 90\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z = 2^{90}(\cos 60\pi + \cancel{i\sin 60\pi}) = 2^{90}(1) = 2^{90} \quad \checkmark$$

مثال مهم) نشان دهید:

$$\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n = \left(\frac{1+i\,tg\,n\alpha}{1-i\,tg\,n\alpha}\right)$$

حل) $\left(\dfrac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n = \left(\dfrac{\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}{\dfrac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}\right)^n$

ادامه $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}\right)^n = \left(\dfrac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}\right)$

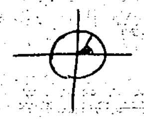
$$= \frac{\dfrac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha}}{\dfrac{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}{\cos n\alpha}} = \frac{1+i\,tg\,n\alpha}{1-i\,tg\,n\alpha}$$

مثال) مقدار $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$ را محاسبه کنید. (سال ۸۳)

پاسخ)

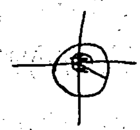
$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}=\frac{z_1}{z_2}$$

$$z_1=1+\sqrt{3}\,i \ ,\quad |z_1|=2 \ ,\quad z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



$$\Rightarrow\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

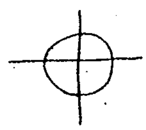
$$z_2=1-\sqrt{3}\,i \ ,\quad |z_2|=2 \ ,\quad z_2=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



$$\Rightarrow\quad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cancel{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\cancel{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}{cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\quad z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}=\left(cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}$$



$$z=\left(\cos\underbrace{\frac{20\pi}{3}}_{6\pi+\frac{2\pi}{3}}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بسیار مهم

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-x+1=0$ باشند، نشان دهید:

(پایان ترم سال ۸۴-۸۵)

$$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{n\pi}{3}$$

پاسخ)

$$x^2-x+1=0 \ \Rightarrow\ \Delta=1-4(1)=3i^2$$

$$*\begin{cases}\alpha=\dfrac{+1+\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\[2mm] \beta=\dfrac{+1-\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\\[2mm] \beta=\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\end{cases}$$

$$\alpha^n+\beta^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)^n$$

$$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{n\pi}{3}\ \checkmark$$

مثال) حاصل $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{15}$ را بدست آورید ؟ (سوال پایان ترم ۸۴-۸۳)

پاسخ)

$$z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$$

$$*\begin{cases} z_1=\sqrt{3}+i \longrightarrow |z_1|=2 \longrightarrow z_1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ z_2=\sqrt{3}-i \longrightarrow |z_2|=2 \longrightarrow z_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}=\frac{\left(\cancel{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{15}}{\left(\cancel{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\right)^{15}}=\frac{\mathrm{cis}\left(\frac{15\pi}{6}\right)}{\mathrm{cis}\left(\frac{-15\pi}{6}\right)}$$

$$z=\mathrm{cis}\left(\frac{15\pi}{6}+\frac{15\pi}{6}\right)=\left(\cos 5\pi+i\sin 5\pi\right)=-1$$

مثال) قسمت حقیقی وموهومی $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{127}$ را بیابید ؟ (پایان ترم سال ۸۴)

پاسخ)

$$z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$|z'|=1 \qquad z'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z=\left(\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}\right)^{127}=\left(\cos\underbrace{\frac{127\pi}{3}}_{42\pi+\frac{\pi}{3}}+i\sin\frac{127}{3}\pi\right)=\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(سال ۸۳)

مثال) برای دو عدد مختلط z و w داریم : $\left|\frac{z+w}{z-w}\right|=1$. نشان دهید قسمت حقیقی $z\bar{w}$ برابر است با صفر ؟

پاسخ)

$$\left|\frac{z+w}{z-w}\right|=1 \Rightarrow |z+w|^2=|z-w|^2$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

روش دوم) $z=c+di$ ، $w=a+bi$

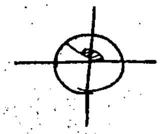
$$z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w=z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-\bar{z}w$$

$$2z\bar{w}+2\bar{z}w=0 \Rightarrow 2\left(z\bar{w}+\overline{z\bar{w}}\right)=0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z\bar{w})=0$$

مثال) اگر $z=-1+i$ باشد، حاصل z^{15} را بیابید؟ (تابستان ۸۳)

پاسخ)

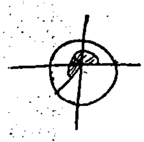
$$z=-1+i \qquad |z|=\sqrt{2} \Rightarrow z=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$



$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z^{15}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{15}=\sqrt{2}^{15}\left(cis\left(\frac{45\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^{15}=(\sqrt{2})^{15}\left(\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$



$$z^{15}=(\sqrt{2})^{15}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

مثال مهم) اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$، ثابت کنید: $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ ؟

پاسخ) (سال ۸۴ و ۸۵)

$$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$$

$$\Delta=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta=(4\sin^2\theta)i<0$$

$$*\begin{cases} z_0=\dfrac{2\cos\theta+\sqrt{4\sin^2\theta\, i}}{2}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \checkmark \\ z_1=\dfrac{2\cos\theta-\sqrt{4\sin^2\theta\, i}}{2}=\cos\theta-i\sin\theta \quad \checkmark \end{cases}$$

$$z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\boxed{2\cos n\theta} \checkmark$$

مثال) تمرین) ریشه‌های معادله $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$ را بیابید؟

پاسخ)

$$*\begin{cases} z_0=\dfrac{3-i}{2+i}=\boxed{1-i} \checkmark \\ z_1=\dfrac{2}{2+i}=\boxed{\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i} \checkmark \end{cases}$$

(پایان ترم سال ۸۶_۸۵)

X مثال مهم: نشان دهید:

$$\underbrace{(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n}_{①}+\underbrace{(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n}_{②}=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$$

پاسخ)

$$\begin{cases}1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\\ \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{cases}\Rightarrow ①=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$①=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n=\boxed{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\mathrm{cis}\frac{n\theta}{2}\right)}\ \checkmark$$

$$②=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$②=\boxed{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\mathrm{cis}\frac{n\theta}{2}\right)}\ \checkmark$$

$$①+②=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\cancel{i\sin\frac{n\theta}{2}}+\cos\frac{n\theta}{2}-\cancel{i\sin\frac{n\theta}{2}}\right)$$

← درنهایت

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^2=\boxed{2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{n\theta}{2}}\ \checkmark$$

(ساده) مثال مهم) اگر $z=\cos\theta+i\sin\theta$ باشد، و n هر عدد صحیح مثبت باشد،

ثابت کنید: $$z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin(n\theta)$$

پاسخ)

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n}=z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$$

$$\Rightarrow\quad z^n+z^{-n}=\cancel{\cos n\theta}+i\sin n\theta-(\cancel{\cos n\theta}-i\sin n\theta)$$

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2i\sin(n\theta)$$

* شکل نمایی اعداد مختلط :

سری مک لورن تابع $f(x) = e^x$ عبارتست از :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

بنابراین :

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)}_{\sin\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \longrightarrow z = |z|e^{i\theta}$$

$$z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \longrightarrow z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

- به طور کلی هر عدد مختلط را می توان به ۳ فرم زیر نمایش داد :

الف) به فرم دکارتی : $z = x + iy$

ب) فرم قطبی یا مثلثاتی : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

ج) فرم نمایی : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

۳ فرم کلی اعداد مختلط بسیار مهم بوده، به طوری که یادگیری هر ۳ مورد موجب تسهیل در حل مسئله است !

و از رابطه $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، خواهیم داشت:

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

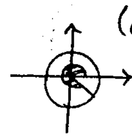
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$ مهم ✓

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$ مهم ✓

مثال) اگر $z = 1 - i$ ، آنگاه z^{200} را با استفاده از روش نمایی بدست آورید؟

پاسخ)



$z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$-\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{7\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{200} = (\sqrt{2})^{200} e^{-i\left(\frac{200\pi}{4}\right)}$$

$$z^{200} = 2^{100} \cdot \left(e^{-i\,50\pi}\right) = 2^{100}\left(\cos(-50\pi) + i\cancel{\sin(-50\pi)}\right) = 2^{100}$$

مثال مهم) عدد مختلط $z = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}\, i}$ را به صورت نمایی بنویسید؟

پاسخ)

$$z = \frac{z_1}{z_2} : \begin{cases} z_1 = 1 - i \longrightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} \checkmark \\ z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i \longrightarrow z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \longrightarrow \boxed{z_2 = 2e^{i\pi/3}} \checkmark \end{cases}$$

$|z_2| = 2$

$$z = \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{-3\pi - 4\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{12} i}$$ ✓

مثال مهم) دو عدد مختلط را چنان بیابید که مجموع آن‌ها 5 و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر 8 باشد؟

پاسخ)

$$* \begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_1 z_2 = 8 \longrightarrow z_2 = \dfrac{8}{z_1} \end{cases} \longrightarrow z_1 + \frac{8}{z_1} = 5$$

$$z_1^2 - 5z_1 + 8 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(8) = 25 - 32 = -7 < 0 \longrightarrow \Delta = 7i^2 \checkmark$$

$$z_1 = \frac{5 + \sqrt{7i^2}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$$z_2 = \frac{5 - \sqrt{7i^2}}{2} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

مثال) (سؤال امتحان پایان ترم نیمسال اول ۸۷ - ۸۶) معادله‌ی $e^z = -1$ را حل کنید؟

پاسخ)

$$e^z = -1 \longrightarrow e^{x+iy} = -1 \longrightarrow e^x . e^{iy} = -1$$

$$e^x(\cos y + i \sin y) = -1 \longrightarrow e^x \cos y + e^x . i \sin y = -1$$

* در طرف چپ تساوی باید حتماً $e^x \sin y = 0$ شود، چون در سمت راست تساوی قسمت ضریب i صفر است.

$$\text{پس} \longrightarrow \begin{cases} e^x \sin y = 0 \xrightarrow[e^x \neq 0]{e^x > 0} \sin y = 0 \Rightarrow \boxed{y = k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}} \\ e^x \cos y = -1 \xrightarrow{e^x > 0} \begin{cases} e^x = 1 \\ \cos k\pi = -1 \end{cases} \xRightarrow{\text{درصورتی که}} \begin{cases} x = 0 \\ k = 2n+1 \end{cases} \end{cases}$$

لذا $z = x + iy$ به طوری که $x = 0$ و $y = k\pi = (2n+1)\pi$

جواب معادله با شرط $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

$$\Rightarrow z = 0 + i(2n+1)\pi \longrightarrow z = (2n+1)\pi i \checkmark \ , \ n \in \mathbb{N}$$

مثال مهم) با کمک قضیه‌ی دموآور $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را به دست آورید؟

پاسخ) ثابت می‌کنیم که :

$$* \begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(\overset{-1}{i^2}\sin^2\theta) + i^3\sin^3\theta$$

$$((\cos\theta) + i\sin\theta)^3 = \underbrace{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}_{} + (\underbrace{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}_{})\, i = \underline{\cos 3\theta} + i\underline{\sin 3\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \checkmark \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \checkmark \end{cases}$$

تمرین) حاصل $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را بدست آورید؟ (سؤال بابا) ترم ۸۴-۸۵)

راهنمایی) در اینجا فرض کنید : $\frac{z_1}{z_2} = z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ ، پس z را به فرم قطبی یا نمایی درآورده و به راحتی z^{10} را محاسبه کنید.

** (تمرین ویژه) اگر a و b و c زوایای یک مثلث باشند، آنگاه مقدار عبارت زیر را بیابید؟

جواب $= i$

$$I = (\sin A + i\cos A)^{1389} \cdot (\sin B + i\cos B)^{1389} \cdot (\sin C + i\cos C)^{1389}$$

* حل معادلات در اعداد مختلط که درجه‌ی معادله $n > 2$ باشد، $(n \in \mathbb{N})$

$$z^n = |z^n|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

اگر درجه‌ی معادله n و $|z^n| = R$:

$$K \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

$$z_K = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{2K\pi + \alpha}{n} + i\sin\frac{2K\pi + \alpha}{n}\right)$$

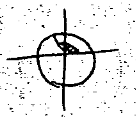
* به K از صفر تا یکی از درجه‌ی معادله که بیشتر است، $(n-1)$ کمتر را می‌دهیم.

مثال) هر 6 ریشه‌ی معادله‌ی زیر را بدست آورید؟ (پایان ترم سال 84) $z^6+1=i\sqrt{3}$

پاسخ)

$$z^6=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$|z^6|=\sqrt{1+3}=2 \longrightarrow \begin{cases} n=6 \\ \alpha=\frac{2\pi}{3} \\ K=0,1,2,3,4,5 \quad , \boxed{n-1=5} \end{cases}$$



$$z^6=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow$$

$$z^6=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{K=0} \quad z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\xrightarrow{K=1} \quad z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{2\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{K=2} \quad z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{4\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{K=3} \quad z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{6\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{K=4} \quad z_4=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{8\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{8\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{K=5} \quad z_5=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{10\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{10\pi+\frac{2\pi}{3}}{6}\right)$$

مثال به عهده‌ی دانشجو) ریشه‌های معادله‌ی $z^4-1=i$ را بدست آورید؟

مثال به عهده‌ی دانشجو) ریشه‌های معادله‌ی $z=(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{3}}$ را بدست آورید؟

مثال مهم) تمام ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید؟ $z=(-1+\sqrt{3}i)^{\frac{5}{4}}$

سؤال امتحان پایان ترم (۹۱-۹۰) تمام ریشه‌ها معادله $z^4+4z^2+16=0$ را بیابید؟

پاسخ) روش اول

$$(z^2+2)^2+12=0 \longrightarrow (z^2+2)^2=-12=12i^2$$

$$z^2+2=+2\sqrt{3}\,i \quad ①$$

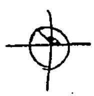
$$z^2+2=-2\sqrt{3}\,i \quad ②$$

① $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$

$|z^2|=R=\sqrt{4+12}=4$

$\alpha=\frac{2\pi}{3}$ ، $n=2$ ، $K=0,1$ ، $4=R$

$z^2=4\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$



$z^2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

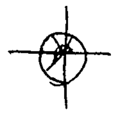
$\xrightarrow{K=0}$ $z_0=\sqrt[2]{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,i$ ✓

$\xrightarrow{K=1}$ $z_1=\sqrt[2]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1-\sqrt{3}\,i$ ✓

② $z^2=-2-2\sqrt{3}\,i$

$|z^2|=R=\sqrt{4+12}=4$

$z^2=4\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$



$z^2=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$\alpha=\frac{4\pi}{3}$ ، $K=0,1$ ، $n=2$ ، $R=4$

$\xrightarrow{K=0}$ $z_2=\sqrt[2]{4}\left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}\,i$ ✓

$\xrightarrow{K=1}$ $z_3=\sqrt[2]{4}\left(\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\,i$ ✓

(پس 4 ریشه عبارتند از: $1+\sqrt{3}\,i$ ، $1-\sqrt{3}\,i$ ، $-1+\sqrt{3}\,i$ و $-1-\sqrt{3}\,i$)

روش دوم)

فرض: $z^2=A \longrightarrow A^2+4A+16=0$

$$\Delta=16-4(16)=16-64=48i^2<0$$

$$A=\frac{-4+\sqrt{48i^2}}{2}=-2+2\sqrt{3}\,i$$

$$A=\frac{-4-\sqrt{48i^2}}{2}=-2-2\sqrt{3}\,i$$

ادامه‌ی مرحله مثل روش اول می‌باشد.

(این سؤال در سال‌های ۸۸ (۲ بار)، ۸۹ (۲ بار)، [illegible] و سال‌های قبل هم به کثرت آمده است.)

(سؤال امتحان پایان ترم ۹۰-۸۹ نیمسال اول)

مثال) تمام ریشه ها معادله $(z-i)^4+(z+i)^4=0$ را بدست آورید؟

پاسخ)

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

با فرض $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ داریم:

$$w^4=\cos\pi+i\sin\pi$$

درنتیجه $\Rightarrow$ $w=\left(\cos\dfrac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\dfrac{2k\pi+\pi}{4}\right)$ $\quad k=0,1,2,3$

ازطرفی باتوجه به اینکه $\dfrac{z-i}{z+i}=w$ نتیجه می شود که:

$$z-i=zw+iw \longrightarrow z-zw=iw+i$$

$$\Rightarrow z(1-w)=i(1+w)$$

$$\Rightarrow z=\left(\frac{1+w}{1-w}\right)i$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} \quad z=\frac{1+\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)}{1-\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)\right)}$$

$k=0,1,2,3$

(این سؤال بسیار بسیار مهم است!)

مثال) هر 4 ریشه‌ی معادله‌ی زیر را بدست آورید؟

پاسخ)

$$z^4-4z^3+6z^2-4z-\underline{15}=0$$

ابتدا مقسوم علیه‌های عدد ثابت -15 را می‌نویسیم:

مقسوم علیه‌های -15 : $\{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$

حال یکی یکی اعداد را امتحان می‌کنیم در معادله:

$\text{if: } z=+1 \xrightarrow{\text{در معادله}} (1)^4-4(1)^3+6(1)^2-4(1)-15\neq 0 \Rightarrow$ پس $z=1$ ریشه نیست.

$\text{if: } z=-1 \xrightarrow{\text{در معادله}} (-1)^4-4(-1)^3+6(-1)^2-4(-1)-15=0 \longrightarrow$ پس $z_0=-1$ یک ریشه‌ی معادله است.

حال، که یک ریشه را داریم به دو طریق می‌توانیم معادله‌ی درجه 4 را با داشتن آن ریشه به معادله‌ی ضرب درجه ۳ و درجه ۱ تبدیل کنیم.

روش اول)

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{z^4}-4z^3+6z^2-4z-15 & z+1 \\ \cline{2-2}
\ominus \cancel{z^4} \ominus z^3 & z^3-5z^2+11z-15 \\ \cline{1-1}
-5\cancel{z^3}+6z^2-4z-15 & \\
\oplus 5\cancel{z^3} \oplus 5z^2 & \\ \cline{1-1}
11\cancel{z^2}-4z-15 & \\
\ominus 11\cancel{z^2}-11z & \\ \cline{1-1}
-15\cancel{z}-\cancel{15} & \\
\oplus 15\cancel{z} \oplus \cancel{15} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

معادله درجه 4 $=(z^3-5z^2+11z-15)(z+1)$

روش دوم)

یک ریشه که یافتیم: $\boxed{z_0=-1}$

	1	-4	+6	-4	-15	ضرایب معادله درجه 4
	1	-5	11	-15	0	ضرایب معادله درجه 3

اولین ریشه

$$\boxed{z^3-5z^2+11z-15=0}$$

اکنون، سراغ مقسوم علیه‌های دیگر -15 می‌رویم:

$z=-3 \xrightarrow{\text{در معادله}} (-3)^3-5(-3)^2+11(-3)-15 \neq 0 \Rightarrow$ $z=-3$ ریشه نیست!

$z=3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (3)^3-5(3)^2+11(3)-15=0 \Rightarrow z_1=3$ ریشه ✓

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{z^3}-5z^2+11z-15 & z-3 \\
\hline
\ominus \cancel{z^3} \oplus 3z^2 & z^2-2z+5 \\
\hline
-\cancel{2z^2}+11z-15 & \\
\oplus \cancel{2z^2} \ominus 6z & \\
\hline
\cancel{5z-15} & \\
\ominus \cancel{5z} \oplus \cancel{15} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\boxed{\text{معادله‌ی درجه } 3 = (z-3)(z^2-2z+5)}$

یا:

$\boxed{z_1=+3}$

1	-5	+11	-15	ضرایب معادله‌ی درجه ۳
1	-2	+5	0	ضرایب معادله جدید (درجه ۲)

$z^2-2z+5=0$ که این معادله، به سادگی قابل حل است:

$$\Delta = 4-4(5)=4-20=16i^2$$

$$
* \begin{cases}
z_2 = \dfrac{2+\sqrt{16i^2}}{2} = 1+2i \longrightarrow z_2 = 1+2i \ ✓ \\[2ex]
z_3 = \dfrac{2-\sqrt{16i^2}}{2} = 1-2i \longrightarrow z_3 = 1-2i \ ✓
\end{cases}
$$

پس 4 ریشه‌ی معادله برابر است با:

$z_0=-1$ ، $z_2=1+2i$

$z_1=+3$ ، $z_3=1-2i$

مثال مهم) تمامی ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید؟

$$z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z = 0$$

پاسخ)

راهنمایی) چون $z=-1$ ریشه معادله نیست، پس دو طرف معادله را در $(z+1)$ ضرب کرده و معادله را حل کنید.)

مثال ۵۵) معادلات زیر را حل کنید؟

A) $1 + z^2 + z^4 + z^6 = 0$

پاسخ) با فرض اینکه $z \neq \pm 1$ و اینکه ۱ و ۱- ریشه‌ی معادله نیستند، $z^2 - 1$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم و داریم:

$$(z^2-1)(1+z^2+z^4+z^6) = 0 \rightarrow z^8 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{z^8 = 1 + 0i}$$

این معادله را حل کرده و 8 ریشه را بدست آورده و ۲ ریشه‌ی ۱- و ۱+ را که از آن کم کنیم (چرا؟) ۶ ریشه‌ی معادله‌ی مذکور بدست می‌آید.

B) $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$

راهنمایی) (z^2+1) را در طرفین معادله ضرب کرده و معادله را حل کنید.)

C) $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$

راهنمایی) ⟵ $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = (z+1)^3 + 8 = 0$; ....

D) $3z^3 + 3z^2 + z + 9 = 0$

راهنمایی) ⟵ $3z^3 + 3z^2 + z + 9 = (\frac{1}{3} + z)^3 . 3 + \frac{80}{9}$, ...

پایان فصل اول